Fen-Edebiyat Fakültesi	ARASINAV SINAV KAĞIDI	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Analiz 4	
İmza:	Sınav Tarihi: 9 Nisan 2019	

Her soru 20 puandır. Yanlızca beş soruyu cevaplayın. Süre 90dk.

1. $f(x,y) = x^2+2xy$ fonksiyonunun herhangi bir (x_0, y_0) noktasında türetilebilir olduğunu türetilebilirliğin tanımını kullanarak gösterin.

Çözüm: $f_x(x_0,y_0) = 2x_0 + y_0$ ve $f_y(x_0,y_0) = 2x_0$ olduğunu kullanarak

$$\Delta(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k = h^2 + 2hk$$

buluruz.

$$\frac{|\Delta(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq |h+2k| \left(\frac{h^2}{h^2+k^2}\right)^{1/2} \leq |h+2k|$$

yazarsak $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\Delta(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ olduğu çıkar.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$ ve $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$ ise $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = L_1L_2$ olduğunu ispatlayın.

Çözüm: $\epsilon > 0$ verilsin. Limit tanımından $0 < \left|(x,y)-(x_0,y_0)\right| < \delta_1$ ise $\left|f(x,y) - L_1\right| < \frac{\epsilon}{2(1+|L_2|)}$ ve $0 < \left|(x,y)-(x_0,y_0)\right| < \delta_2$ ise $\left|g(x,y)-L_2\right| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2(1+|L_1|)}, 1\right\}$ şartlarını sağlayan $\delta_1, \delta_2 > 0$ sayılarının var olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned}
\left|f(x,y)g(x,y) - L_1L_2\right| &= \left|(f(x,y) - L_1 + L_1)(g(x,y) - L_2 + L_2)\right| \\
&\leq \left|f(x,y)-L_1\right|\left|g(x,y)-L_2\right| + |L_2|\left|f(x,y)-L_1\right| + |L_1|\left|g(x,y)-L_2\right| \\
&\leq (1+|L_2|)\left|f(x,y)-L_1\right| + |L_1|\left|g(x,y)-L_2\right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{|L_1|}{2(1+|L_1|)}\epsilon \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(2xy^2)}{x^2+2y^2}$ limitini varsa bulun ve sonucu ispatlayın.

Çözüm:

$$\left|\frac{\sin(2xy^2)}{x^2+2y^2}\right| \leq \left|\frac{2xy^2}{x^2+2y^2}\right| = |x|\left|\frac{2y^2}{x^2+2y^2}\right| \leq |x|$$

Sonuç sıkıştırma teoreminden çıkar.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ limitini $\left|u - \frac{u^3}{3!}\right| < |\sin u| < |u|,\ u \neq 0$ eşitsizliği yardımıyla bulun.

Çözüm: $(x, y) = (0,0)$ noktasının yeterince küçük bir $U \subset \mathbb{R}^2$ komşuluğunu her $(x, y) \in U$ için $0 \le x^2 + y^2 \le \pi$ olacak şekilde seçelim. Yani her $(x, y) \in U$ için $\left|\sin(x^2 + y^2)\right| = \sin(x^2 + y^2)$ olur. Bu U komşuluğundaki her $(x, y) \neq (0,0)$ için

$$\left|1 - \frac{(x^2+y^2)}{6}\right| < \left|\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right| = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} < 1$$

olduğundan sonuç sıkıştırma teoreminden 1 bulunur.

5. f ve g her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olan iki fonksiyon olmak üzere $z = f(x+g(y))$ ise $z_x z_{xy} = z_y z_{xx}$ denkleminin sağlandığını gösterin.

Çözüm: $z_x = f'(x+g(y))$, $z_{xy} = f''(x+g(y))g'(y)$, $z_y = f'(x+g(y))g'(y)$, $z_{xx} = f''(x+g(y))$ olduğundan sonuç çıkar.

6. g fonksiyonu, türevi $g'(u) < 1$, $\forall u \in \mathbb{R}$ şartını sağlayan tek değişkenli bir fonksiyon ve $0 < b < a$ reel sayılar olsun. $x - az = g(y - bz)$ denkleminin herhangi bir (x, y) noktasında $z = f(x, y)$ şeklinde tek bir şekilde çözülebileceğini ve çözümün $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$ denklemini sağlayacağını gösteriniz.

Çözüm: $F(x, y, z) = g(y - bz) - x + az$. $\frac{\partial F}{\partial z} = -bg'(y-bz) + a > -bg'(y-bz) + b > -b + b = 0$ olduğundan herhangi bir (x, y, z) için $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$ olur ve kapalı fonksiyon teoremine göre denklem $z = f(x, y)$ şeklinde tek olarak çözülebilir.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} = \frac{1}{-bg'(y-bz)+a}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z} = \frac{g'(y-bz)}{-bg'(y-bz)+a},$$

olduğundan sonuç çıkar.

7. $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında herhangi bir yöndeki yönlü türevini (a) yönlü türevin limit tanımını kullanarak (b) gradyan vektör metoduyla bulun.

Çözüm: $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ bir birim vektör, yani $u_1^2 + u_2^2 = 1$ olsun.

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{tu_1t^2u_2^2}{t(t^2u_1 + t^2u_2^2)} = \frac{u_1u_2^2}{u_1^2+u_2^2} = u_1u_2^2.$$

(b) şıkkı.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \qquad f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = 0$$

ve $\nabla f(0,0) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u} = 0$.

not. İki sonucun farklı çıkmasının sebebi, fonksiyonun $(0,0)$ noktasında türetilemez olması sebebiyle, gradyan vektör metodunun sonuç vermemisidir. Yani doğru sonuç (a) şıkkındaki tanım kullanılarak elde edilen sonuçtur.